Г.И. Пеникас
ГУ ВШЭ, Москва

Модели «копула» в приложении к задачам финансов[1]

... в центре нижнего яруса (органа) помещаются ...
механизм соединений или копуляций клавиатур...
Еженедельник «Музыка», № 22, 1911 г.

Цель данной статьи – ознакомить читателя с аппаратом моделей «копула», продемонстрировать возможности его приложения к таким финансовым задачам, как оценка риска, его хеджирование, выбор оптимального инвестиционного портфеля, оценка стоимости сложных финансовых инструментов и построение моделей дюрации. Для этой цели вначале подробно описывается понятие «копула» и приводятся ее основные семейства. Затем разбираются вопросы оценки и проверки качества инференции полученных моделей. Дается анализ эмпирических работ по применению копул в обозначенных задачах финансов. В заключении освещаются основные проблемные области, требующие дальнейшей разработки.

Ключевые слова: **копула, архимедовы, экстремальные, риск, хеджирование, дюрация.**

Классификация JEL: C16, C46.

1. Введение

В современной финансовой литературе широко используются показатели линейной взаимосвязи (например, в оптимизации – (Lintner, 1965; Samuelson, 1969; Merton, 1973; Markowitz, 1990); в хеджировании – (Cecchetti et al., 1988; Myers, Hanson, 1996); в оценке рисков – (RiskMetrics, 1996)), однако есть ряд научных результатов, говорящих о неадекватности такого подхода (в том числе в связи с ненормальностью распределения, что обсуждается в (Clemen, Reilly, 1999; Embrechts et al., 1999; Ane, Kharoubi, 2003)). Данный вывод относится и к оценке рисков как к отдельной группе финансовых переменных. В частности, в (Alexander, Pezier, 2003, p. 26) отмечено, что мера линейной корреляции может применяться для агрегирования рисков только на краткосрочном временном промежутке, на длительном же ее использование некорректно, так как имеют место экстремальные явления и проявления высокой степени зависимости.

Наиболее элегантным решением проблемы негауссовского характера распределения случайных величин (включая финансовые риски) являются копулы. При этом заметим, что копулы уже нашли успешное применение при моделировании природных явлений (например, по океанологии: см. работу (Michele de et al., 2007)), при исследовании способов перемешивания данных как средства защиты базы данных (подробнее см. (Sarathy et al., 2002)), при анализе микроэкономических данных (Smith, 2003; Genius, Strazzera, 2004; Sun et al., 2008; Kim et al., 2007).

[1] Автор выражает благодарность С.А. Айвазяну за научное руководство при подготовке данной статьи и Ф.Т. Алескерову за подробные комментарии по работе. Отдельное спасибо А.Н. Кулаковой за поиск музыкальной параллели с копулами. Автор также признателен коллегам за обсуждение доклада с предварительными наработками по теме на первом Российском экономическом конгрессе-2009, в частности А.С. Козлову.

Копула – это функция, позволяющая перейти от одномерных (частных) распределений случайных величин к совместному распределению. Необходимо заметить, что для решения задачи оценки многомерного распределения могут быть также использованы такие подходы, как многомерные GARCH-модели (подробнее см. (Bauwens et al., 2006)); модели с переключающимися режимами корреляции (threshold-correlation models) (Houle, 2008); условные распределения (Walter et al., 2004). Подчеркнем, что предметом данной работы является описание моделей «копула» и их применения в решении финансовых задач без сравнения их эффективности в соотношении с вышеописанными альтернативными подходами.

Изучение моделей «копула» представляет особую актуальность ввиду законодательных инициатив по регулированию рисков коммерческих банков и контролю уровня достаточности их капитала. Весной 2009 г. базельский комитет по банковскому надзору выделил копулы как один из наиболее корректных способов оценки рисков (BCBS, 2009, p. 28).

Структура статьи выглядит следующим образом. В разд. 2 дается определение модели «копула» и приводятся ее основные семейства; в разд. 3 – подходы к оценке данных моделей; в разд. 4 – методы диагностики качества инференции полученных моделей; в разд. 5 – основные эмпирические приложения моделей «копула» к задачам финансов. В разд. 6 обсуждаются вопросы, которые открывают дальнейшие направления исследований.

2. Обзор моделей

2.1. Определение копулы

Пусть X_1 и X_2 – случайные величины, функции распределения вероятности которых определены на множествах A и B соответственно. Будем обозначать реализацию i случайной величины j как $x_j(i)$.

Будем называть функцию $C(X_1, X_2)$ *возрастающей по каждой переменной* X_1 и X_2, если для нее выполняется следующее условие при $x_j(1) \le x_j(2)$:

$$C(x_1(2), x_2(2)) + C(x_1(1), x_2(1)) - C(x_1(2), x_2(1)) - C(x_1(1), x_2(2)) \ge 0. \qquad (1)$$

Введем понятие *подкопула* $C(X_1, X_2)$ как двумерную функцию двух переменных[2] X_1 и X_2, определенную на множестве $A \times B$, $A \in [0;1]$ и $B \in [0;1]$, с областью значений $[0;1]$ и удовлетворяющую условиям:

1) ограничение снизу, т.е. $C(X_1, X_2) = 0$, если $\exists i : X_i = 0$;

2) $C(X_1, X_2) = X_i$, если $\forall j \ne i : X_j = 1$;

3) возрастание по каждой переменной.

Тогда *копула* – это подкопула в случае $A = [0;1]$ и $B = [0;1]$.

При страховых (актуарных) вычислениях и при оценке стоимости сложных производных финансовых инструментов часто имеют дело с *копулой дожития* $\widehat{C}(X_1, X_2)$, которая определяется по формуле:

[2] В данном случае не требуется, чтобы X_1 и X_2 были случайными величинами.

$$\widehat{C}(X_1, X_2) = P\left(X_1 > x_1; X_2 > x_2\right) = X_1 + X_2 - 1 + C(X_1, X_2)\,. \qquad (2)$$

Таким образом, любая копула обладает следующими свойствами.

1. Ограниченность

$$0 \le C(x_1, ..., x_n) \le 1. \qquad (3)$$

2. Наличие границ Фреше–Хефдинга (Frechet–Hoeffding)

$$\mathrm{Max}(0, u + v - 1) \le C(u, v) \le \mathrm{Min}(u, v). \qquad (4)$$

3. Упорядоченность (доминирование). Копула C_2 доминирует над копулой C_1, или $C_1 \prec C_2$, в случае когда $\forall x_1, ..., x_n$ выполняется неравенство $C_1(x_1, ..., x_n) \le C_2(x_1, ..., x_n)$.

Использование копул для восстановление многомерного совместного распределения основано на выводах теоремы Шкляра, введенной в (Sklar, 1959).

Теорема Шкляра. *Пусть H – совместная функция распределения двух случайных величин x, y, которые имеют частные функции распределения F и G соответственно. Тогда существует такая копула C, что для любого x, y можно записать:*

$$\exists C : H(x, y) = C[F(x); G(y)] \quad \forall x, y \in (-\infty; +\infty). \qquad (5)$$

Причем если функции *F* и *G* непрерывны, то копула C единственна; в противном случае копула *C* может быть всегда определена на области значений *F* и *G*. И наоборот, если *C* – копула, а *F* и *G* – частные (маргинальные) функции распределения, то функция *H*, определенная выше, является функцией совместного распределения с аргументами *F* и *G*.

2.2. Основные семейства копул

Выделяют несколько основных семейств копул: эллипсообразные, архимедовы, экстремальные. Прежде чем перейти к рассмотрению отдельных семейств копул, необходимо ввести такие понятия, как «независимая копула» и «полноценная копула».

Независимая копула, или копула произведения (product copula), соответствует случаю независимости случайных величин и определяется следующим образом:

$$C\left(u_1; u_2; ...; u_m\right) = u_1\, u_2 \ldots u_m, \qquad (6)$$

где u_i – обратная функция распределения случайной величины *i*.

Полноценная копула (comprehensive copula) – это копула, которая включает границы Фреше–Хефдинга и случай независимой копулы как частные случаи значений параметров.

Эллипсообразные копулы (гауссовская и Стьюдента) происходят из аналитических форм записи многомерного гауссовского распределения и распределения Стьюдента. Они позволяют восстанавливать симметричные совместные распределения. Необходимо заметить, что для получения многомерного нормального распределения необходимо взять гауссовскую копулу и гауссовские частные распределения, а для распределения Стьюдента – копулу Стьюдента (*t*-копулу) и частные распределения Стьюдента с одинаковым числом степеней свободы.

В своей работе К. Александер и Дж. Пезье подчеркивают, что использование гауссовской копулы допустимо только в случае, когда зависимость случайных величин может быть в полной мере отражена линейной корреляцией (Alexander, Pezier, 2003, p. 72).

Архимедовы копулы можно представить в виде:

$$C\left(u_1;u_2;...;u_m\right)=\varphi^{-1}\left[\varphi\left(u_1\right)+\varphi\left(u_2\right)+...+\varphi\left(u_m\right)\right], \qquad (7)$$

где u_i – обратная функция распределения случайной величины i, φ – функция-генератор копулы.

Свое название архимедовы копулы получили из-за аналогии с архимедовой аксиомой. Архимедова аксиома постулирует, что для любых двух целых положительных чисел a и b всегда найдется такое число n, что будет верно соотношение $n\,a>b$. Для копулы введем следующие обозначения: $u_C^1=u$ и $u_C^{n+1}=C(u;u_C^n)$. Тогда $\forall u,v\in\left(0;1\right)\ \exists n:u_C^n>v$, что аналогично аксиоме Архимеда (доказательство данного факта см. в (Nelsen, 2006, p. 115, 122)).

Основными архимедовыми копулами являются копулы Клэйтона, Гумбеля, Франка, Али-Микаэля-Хака (их формы записи см. в (Nelsen, 2006, p. 116–121)).

Экстремальные копулы созданы на основе одномерных законов распределения экстремумов. Для них должно выполняться соотношение (Bouye, 2002, p. 5):

$$C\left(u_1^t;u_2^t;...;u_m^t\right)=C^t\left(u_1;u_2;...;u_m\right)\quad\forall t>0. \qquad (8)$$

В статье (Ghoudi, Khoudraji, Rivest, 1998) дается обзор двумерных экстремальных копул Галамбоса, Гумбеля (первого и второго типов), Маршалла–Олкина.

Другие копулы. В отдельную категорию можно вынести такие семейства, которые не относятся ни к одному из выше указанных. Так, копулы Плаке и Фарли–Гумбеля–Моргенштерна (FGM) не являются копулами ни эллипсообразных распределений, ни экстремальных значений. В их функциональной форме так же невозможно выделить функцию-генератор, как в архимедовых. При этом копула Фарли–Гумбеля–Моргенштерна, имея достаточно простую функциональную форму, позволяет моделировать несильную степень зависимости, из-за чего ее реже используют в финансовых приложениях, чем остальные.

Копула Плаке была образована алгебраическим способом, когда на основе аналитических таблиц вычислялась степень зависимости столбцов от строк (подробнее см. (Nelsen, 2006, p. 89–91)). Необходимо добавить, что копула Плаке является полноценной копулой.

2.3. Многомерные копулы

Копулы получили распространение в вопросах финансов благодаря возможности моделировать более широкий характер взаимосвязи, чем позволяет многомерный нормальный закон. Особенную свободу дают архимедовы копулы. Тем не менее данное преимущество копул имеет и обратную сторону. Большинство архимедовых копул определяются одним параметром. Это служит основным пунктом критики данных моделей, так как даже идеалистический многомерный закон насчитывает $0{,}5n(n-1)$ параметров ковариационной матрицы, где n – размерность распределения. Поэтому исследователи начали искать пути разрешения «проблемы одного параметра» при моделировании совместных распределений высокой размерности. Ниже будут приведены четыре пути решения, найденные в современных исследованиях автором: иерархические, парные, сводные и факторные копулы.

2.3.1. *Иерархические копулы*

В работе (Savu, Trede, 2006) авторы обобщают теорию построения иерархических архимедовых копул, которые позволяют моделировать более гибкую структуру зависимости случайных величин. Возьмем простой случай иерархической копулы[3] $C_{3,2}$ от пяти случайных величин $X_1,\ldots, X_5$. Допустим для наглядности, что первые три переменные X_1, X_2, X_3 тесно взаимосвязаны друг с другом, т.е. их совместное распределение подчиняется функциональной форме копулы $C_{1,1}$; а X_4, X_5 – взаимосвязаны между собой, т.е. описываются копулой $C_{2,1}$. Тогда можно записать: $C_{3,2}(X_1,\ldots, X_5) = C_{3,2}(C_{1,1}(X_1, X_2, X_3); C_{2,1}(X_4, X_5))$. Как указано в работе (Whelan, 2004), такого рода иерархические копулы называются *частично вложенными* (partially nested). Если бы совместное распределение имело следующее представление $C(X_1,\ldots, X_5)=C_{4,4}(X_1, C_{3,3}(X_2, C_{2,2}(X_3, C_{1,1}(X_4, X_5))))$, то такие иерархические копулы назывались бы *полностью вложенными* (fully nested), так как любая копула более высокого уровня включает все копулы более нижних уровней.

Для того чтобы иерархия копул соответствовала совместному многомерному распределению, помимо условия монотонности функции генератора архимедовой копулы необходимо, чтобы степень зависимости (значение параметра копулы) снижалась с ростом уровня иерархии. В работе (Hofert, 2008, p. 5169, table 3) перечислены допустимые комбинации копул, удовлетворяющие условию монотонности генератора для образования иерархических копул. Наиболее часто среди допустимых М. Хоферт отмечает комбинации с участием копулы Клэйтона и копулы Али-Микаэля-Хака.

[3] При обозначении иерархических копул будем руководствоваться следующими обозначениями: в нижнем индексе вначале указывается номер копулы, а после запятой – уровень иерархии.

Заинтересовавшиеся в этом подходе читатели могут ознакомиться с работой (Okhrin et al., 2009), в которой описываются свойства архимедовых копул и дается расчет индексов зависимости хвостов (tail dependence index) многомерного распределения для иерархических копул.

2.3.2. *Парные копулы*

В работе (Aas et al., 2009) предлагается альтернативный вариант решения проблемы одного параметра в многомерных копулах. Фактически вместо иерархии совместного распределения копула представляется в виде произведения парных условных копул. Для лучшего понимания идеи приведем пример из (Aas et al., 2009).

Пусть $f(x_1 \mid x_2)$ – это условная плотность распределения случайной величины x_1 при реализации случайной величины x_2; $F(x_i)$ – функция распределения; $c\left[F(x_1);F(x_2)\right]$ – плотность копулы совместного распределения двух случайных величин x_1 и x_2. Тогда условную плотность можно записать через копулу как

$$f(x_1 \mid x_2) = c_{12}\left[F(x_1);F(x_2)\right] f(x_1),$$

двойную условную плотность величины x_1:

$$f(x_1 \mid x_2, x_3) = c_{13|2}\left[F(x_1 \mid x_2);F(x_3 \mid x_2)\right] f(x_1 \mid x_2) \qquad (9)$$

или, согласно полученному ранее выводу:

$$f(x_1 \mid x_2, x_3) = c_{13|2}\left[F(x_1 \mid x_2);F(x_3 \mid x_2)\right] c_{12}\left[F(x_1);F(x_2)\right] f(x_1); \qquad (10)$$

трехмерную плотность распределения (по принципу условных парных копул):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) c_{12}\left[F(x_1);F(x_2)\right] c_{23}\left[F(x_2);F(x_3)\right] \times \\ \times c_{13|2}\left[F(x_1 \mid x_2);F(x_3 \mid x_2)\right]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Данную запись (11) можно использовать для подстановки в функцию максимального правдоподобия. Таким образом, здесь зависимость будет моделироваться тремя параметрами, так как плотность совместного распределения разложена на три копулы.

В подтверждение эффективности предложенного подхода авторы (Aas et al., 2009) рассматривают четырехмерное совместное распределение финансовых доходностей, очищенное от эффектов гетероскедастичности. В работе показано, что парные копулы Стьюдента точнее описывают эмпирические данные, чем четырехмерная копула Стьюдента.

2.3.3. *Сводные копулы*

Другим подходом, также не привязанным единственно к архимедовых копулам, как и парные копулы, являются сводные копулы. В работе (Laforge, 2008a) обосновывается способ их построения как комбинации двумерных, на основании выводов из теоремы Кимберлинга для архимедовых копул (данный способ носит название представление Дарсоу–Нгиена–Олсена).

Поскольку произведение двух копул C_1 и C_2 можно разложить по формуле

$$(C_1C_2)(x,y)=\int_0^1 \frac{\partial C_1(x,t)}{\partial t}\frac{\partial C_2(y,t)}{\partial t}dt,$$

то выполняется следующее равенство

$$C(x_1,...,x_n)=\int_0^1 \frac{\partial C(x_1,t)}{\partial t}...\frac{\partial C(x_n,t)}{\partial t}dt, \qquad (12)$$

или в терминах плотности копулы

$$c(x_1,...,x_n)=\frac{\partial^n C(x_1,...,x_n)}{\partial x_1\cdot...\cdot\partial x_n}=\int_0^1\prod_{i=1}^n c(x_i,t)dt. \qquad (13)$$

Ч. Лафорж показывает, что если трехмерную копулу всегда можно разложить на три двумерные, то при наличии трех двумерных, являющихся производными одной и той же многомерной, восстановить многомерную возможно лишь при выполнении следующего условия:

$$C^{(3)}(x_1,x_2)=\int_0^1 \frac{\partial C^{(1)}(x_1,t)}{\partial t}\frac{\partial C^{(2)}(x_2,t)}{\partial t}dt. \qquad (14)$$

В работе (Laforge, 2008b) демонстрируется переход от классической копулы к *M*- и *W*-сводным копулам. Для их построения используется понятие сводной переменной *x* такой, что:

$$C(x;y_1,...,y_n)=\int_0^1 \frac{\partial C(x,t)}{\partial t}\prod_{i=1}^n\frac{\partial C(y_i,t)}{\partial t}dt. \qquad (15)$$

И понятие верхней границы Фреше–Хефдинга принимает вид

$$C(x,t)=M(x,t)=\min(x,t). \qquad (16)$$

Тогда верно следующее преобразование верхней границы интеграла:

$$c(x;y_1,...,y_n)=\int_0^x\prod_{i=1}^n c(y_i,t)dt. \qquad (17)$$

2.3.4. *Факторные копулы*

Среди альтернативных подходов к решению проблемы одного параметра интерес представляют факторные копулы, поскольку позволяют заложить в модель многомерного распределения количество параметров большее, чем в ковариационной матрице многомерного нормального закона. Данный подход подробно освещается в статье (Liebscher, 2008). Поясним основное содержание этого метода. Для этого введем необходимые обозначения.

Пусть $C_1,...,C_k:[0;1]^d\to[0;1]$ – копулы, являющиеся функциями отображения из *d*-мерного единичного куба на закрытый интервал единичной длины; $g_{ji}:[0;1]\to[0;1]$ – функции, которые либо строго возрастают, либо тождественно равны единице ($j=1,...,k$; $i=1,...,d$); $v\in[0;1]$; $x_i\in[0;1]$ – случайная величина (аргумент функции копулы), равная обратному значению кумулятивной функции распределения. Сформулируем два ключевых требования к функции g_{ji}:

1) $\prod_{j=1}^{k} g_{ji}(v) = v$;

2) $\lim_{v \to +0} g_{ji}(v) = g_{ji}(0)$.

Э. Лейбшер показывает, что следующая функциональная форма также будет являться копулой:

$$C(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^{k} C_j\left(g_{j1}(x_1), \dots, g_{jd}(x_d)\right). \tag{18}$$

Как видно из функциональной формы (18), число копул *k*, на которые разбивается совместное распределение, не зависит от его размерности *d*. Э. Лейбшер предложил данный подход для моделирования разнообразных форм асимметрии совместного распределения, которые не достижимы при стандартных формах архимедовых копул. Практические приложения метода можно обнаружить в работе (Laurent, Gregory, 2003), где исследуется оценка стоимости производных финансовых инструментов.

3. Подходы к оценке моделей «копула»

Существует несколько альтернативных методов для решения задачи моделирования совместного распределения с учетом теоремы Шкляра. Фактически множество комбинаций определяется возможностью параметрической и непараметрической оценки копулы и частных распределений. Все варианты можно обобщить в три метода: параметрический, полупараметрический и непараметрический.

3.1. Параметрический метод

Данный класс методов предполагает параметризацию как частных распределений, так и копулы. Если базовый подход MLE (Maximum Likelihood Estimation) максимизирует функцию правдоподобия одновременно по частным распределениям и по копуле, то метод «от частных распределений» (Inference for Margin – IFM) разбивает оценку на два этапа: вначале – параметризацию частных распределений, затем – копулы.

3.2. Полупараметрический метод

Полупараметрический метод также предполагают двухэтапную оценку копулы. Но на первом этапе вместо параметрической оценки частных распределений берутся эмпирические распределения, а на втором – происходит параметрическая оценка копулы.

В работе (Kim et al., 2007) показано, что полупараметрический метод (*SP* – semi-parametric) дает более состоятельные и устойчивые (робастные) оценки, чем параметрические методы в случаях, когда вид частного распределения не известен и, как следствие, когда возникает угроза их неверной спецификации. О ключевой роли оценки частных распределений в моделировании совместных распределений также пишет Д. Фантаццини (Fantazzini, 2009a).

3.3. Непараметрический метод

Среди непараметрических методов оценки копул можно выделить два подхода: на основе оценки эмпирической копулы и ядерных оценок. Первый подход предполагает оценку функции распределения эмпирической копулы ($C_n(i/n,\ j/n)$), которая отражает число случаев, когда исходы случайных величин одновременно попали в выбранную ячейку сетки разбиения всего множества вероятностного пространства (подробнее см. в (Nelsen, 2006, p. 219). Второй подход предполагает непараметрические (включая ядерные) оценки и для частных распределений. Примеры приложения метода представлены в (Liebscher, 2005; Kiwitt, Neumeyer, 2008).

4. Вопросы инференции

Прежде чем перейти к проверке качества инференции конкретной модели «копула», Д. Берг (Berg, 2009, p. 16) предлагает воспользоваться результатами Ф. Хуффера и К. Парка, которые предложили тест для проверки многомерной эллипсообразности распределения (Huffer, Park, 2007). Одним из приложений данной методики является проверка многомерной нормальности распределения. Таким образом, проверив исходное распределение на эллипсообразность, становится возможным ответить на вопрос, принадлежит ли искомая копула к классу эллипсообразных или нет.

Тем не менее мне не доводилось пока встретить работы, применявшие тест на эллипсообразную симметричность при работе с копулами. Наибольшее распространение получили критерии, сформулированные на основе значения функции максимального правдоподобия – критерии Акаике (AIC) и Шварца (BIC). Вторыми по частоте применения являются тесты оценки дистанции до эмпирической копулы. Третьими – тесты на основе трансформации Розенблатта.

4.1. Критерии Акаике и Шварца

Многие работы по приложению копул основывают выбор модели на критериях Акаике и Шварца (например, (Savu, Ng, 2005; Patel, Pereira, 2008)). Тем не менее, будучи самым простым и интуитивным, данный подход является методологически некорректным, потому что критерии Акаике и Шварца предполагают одинаковую функциональную форму моделей, отличающихся числом переменных (Канторович, 2002, с. 252). Поэтому единственное, что возможно в этом случае, – сравнить копулы Стьюдента с разным числом степеней свободы на основе критериев AIC и BIC. Выбирать между копулами разных семейств и, как следствие, разных функциональных форм методологически некорректно. В подтверждение этого утверждения в работе (Aas et al., 2009, p. 194) показано, что сравнение копул Стьюдента и Клэйтона по критерию максимума функции правдоподобия невозможно (фактически, сравнение по критериям AIC и BIC), так как они не имеют единой функциональной формы, будучи невложенными (non-nested).

4.2. Оценка дистанции до эмпирической копулы

В работе (Genest, Remillard, 2004) предлагается тест для анализа качества подгонки копулы к фактическому совместному распределению. Тест проверяет, не является ли исходное многомерное распределение связкой независимых случайных величин. В этом случае если нулевая гипотеза оказывается верной, то совместное распределение моделируется независимой копулой.

В работе (Remillard, Scaillet, 2009) авторы ставят целью сравнение структур зависимости пар двумерных наборов данных. Для этого оцениваются уровни значимости для теста Крамера-фон-Мизеса, основанного на сопоставлении значений двух эмпирических копул. В работе подчеркнуто, что поскольку метод бутстрэпа неприменим в случае теста Крамера-фон-Мизеса, оценка уровней значимости проводится на основе метода Монте-Карло.

4.3. Тесты на основе трансформации Розенблатта

В 1952 г. М. Розенблатт (Rosenblatt, 1952) впервые предложил трансформировать многомерный случайный вектор в равномерно распределенный единичный куб, по размерности совпадающий с первоначальным вектором. Приложение подхода трансформации Розенблатта к оценке качества инференции было дано в (Dobric, Schmid, 2007). Фактически при этом оценивается дистанция от преобразованного случайного вектора до независимой копулы. Существенная удаленность от независимой копулы не позволяет принять нулевую гипотезу о том, что независимая копула лежит в основе исследуемых данных.

В качестве завершения обзора тестов на качество инференции моделей «копула» интересно проанализировать три работы, посвященные детальному сравнению разных тестов (Genest, Remillard, Beaudoin, 2009; Savu, Trede, 2008; Berg, 2009). Прежде всего эти исследователи считают, что мощность любого теста растет с ростом числа наблюдений, ростом размерности распределения и ростом степени взаимосвязи исследуемых переменных. При этом в (Genest, Remillard, Beaudoin, 2009; Berg, 2009) подчеркивается важная роль нулевой и альтернативной гипотез. В частности, Д. Берг отмечает, что проводить статистические тесты, где нулевой гипотезой является предположение о том, что исследуемая копула является архимедовой, получается эффективнее, чем в случаях, когда нулевая гипотеза предполагает эллипсообразную копулу. Все авторы сходятся в том, что наилучшим тестом может являться в общем случае оценка дистанции до эмпирической копулы. Но расхождение мнений возникает в используемой мере дистанции. Так, Д. Берг предпочитает тест на основе статистики Андерсона–Дарлина (Anderson, Darling, 1954). К. Женест с коллегами отмечают, что введенная в 1954 г. авторами функция взвешивания $1/[u(1-u)]$ (где u – случайная величина), призванная давать больший вес значениям хвостов распределения в рассчитываемой статистике, не подтверждает своего свойства при экспериментах с копулами (Genest, Remillard, Beaudoin, 2009, p. 13, point *c*)). Поэтому в (Genest, Remillard, Beaudoin, 2009) предпочтение отдается тестам на основе статистики Крамера-фон-Мизеса, которые, по мнению этих авторов, более состоятельны, чем статистика Колмогорова–Смирнова для одного и того же случайного процесса.

5. Эмпирические приложения

Рассмотрим пять основных приложений моделей «копула» к задачам финансов: построение модели дюрации, оценку стоимости производных финансовых инструментов, оценку рисков портфеля активов, выбор оптимальной структуры инвестиционного портфеля и хеджирование риска.

5.1. Построение модели дюрации

В финансах модели дюрации появляются в работах (Savu, Ng, 2005; Ng, 2008). Дюрация – это время между подачей торговых заявок (сделок) на бирже. Так, если базой (Savu, Ng, 2005) являются только поданные заявки, то для (Ng, 2008) – заявки и заключенные сделки. Если массив первого исследования насчитывает 60 тысяч наблюдений за две недели, то второго – уже 400 тысяч за три месяца. Фактически копула используется для моделирования зависимости между временными отсечками смежных заявок. Так, в работе (Savu, Ng, 2005) авторы приходят к выводу, что ретроспективный прогноз, проведенный ими на данных второй недели, более точен по моделям «копула» (особенно по смеси копул), чем по моделям, предполагающим многомерную нормальность распределения. Тем не менее ими не отвергается возможность наличия зависимости не только между смежными заявками, но и между более удаленными. Это указывает на потребность моделирования копулы большей размерности. Продолжая идею моделирования смеси копул, в (Ng, 2008) оценивается динамическая смесь копул Клэйтона и копулы дожития Клэйтона, где вес копулы авторегрессионно зависит от веса в прошлом периоде. У. Нг показывает, что модель дает статистически более устойчивые результаты (оценка ожидаемой дюрации меньше и ее стандартное отклонение ниже), чем традиционная модель, предполагающая многомерную нормальность, и чем модель смеси копул со статической структурой.

5.2. Оценка стоимости производных финансовых инструментов

Важно отметить особое место копул в оценке справедливой стоимости производных финансовых инструментов, которая зависит от вероятности наступления совместного события, связанного с движениями цен нескольких активов или с дефолтом нескольких заемщиков. То есть это относится к барьерным опционам и кредитным деривативам (включая залоговые долговые обязательства – Collateralized Debt Obligations – CDO)[4].

5.3. Оценка рисков портфеля активов

Статьи по оценке рисков можно разделить на три группы, анализирующие: 1) страховые риски; 2) ценовые риски изменения стоимости портфеля ценных бумаг; 3) банковские риски.

Оценка страховых рисков, возможно, является одной из первых финансовых областей приложения копул, начавшая свое исчисление от работы (Frees, Valdez, 1998), в которой моделируется двумерное распределение параметров страховых случаев. Из трех рассмотренных копул предпочтение отдано копуле Гумбеля на основе теста на качество подгонки, хотя ретроспективного прогноза авторами проведено не было.

Работа (Tang, Valdez, 2006) по своей сути продолжает направление анализа, начатое в работе (Frees, Valdez, 1998), и посвящена анализу требований достаточности капитала страховой компании на покрытие непредвиденных потерь от подписанного (underwritten) бизнеса по страхования (т.е. от обязательств по заключенным договорам страхования). Авторы работы рассматривают копулы эллипсообразных распределений, так как они позволяют учесть всю ковариационную матрицу при описании зависимости нескольких переменных в отличие от одного параметра, используемого в архимедовых копулах. Недостатком, присущим также и работе (Frees, Valdez, 1998), является отсутствие ретроспективного анализа получаемых прогнозов, что может объясняться коротким временным рядом наблюдений (19 точек).

Исследования ценового риска (Ane, Kharoubi, 2003; Chollete, Heinen, 2006; Kole et al., 2006; Cech, 2006; Фантаццини, 2008; Fantazzini, 2009b) во многом похожи друг на друга и отличаются лишь используемыми данными и незначительными вариациями в технике (параметрический и полупараметрический подходы к оценке копул). В большинстве исследований предпочтение отдается копулам эллипсообразных распределений, поскольку при больших размерностях распределения последние представляют исследователю большую гибкость за счет оценки ковариационной матрицы. Тем не менее работа (Ane, Kharoubi, 2003) является классической, поскольку подтверждает, что рынок акций наилучшим образом описывается копулой Клэйтона. «Классика» в данном случае соответствует тому, что копула Клэйтона характеризуется зависимостью нижних (левых) хвостов распределения, что соответствует зависимости в движении цен финансовых ак-

[4] Исследованию вопросов оценки стоимости опционов посвящены работы: (Cherubini, Luciano, 2000; Cherubini et al., 2004; Goorbergh van den et al., 2005), пример оценки кредитных деривативов можно увидеть в работе (Masala, Menzietti, Micocci, 2005).

тивов, обнаруженной после кризиса 1998 г. Ф. Лонгином и Б. Солником (Longin, Solnik, 1998). Данные исследователи отметили, что ценам акций характерно одновременно падать, но не расти.

При моделировании банковских рисков стоит выделить три работы (Rosenberg, Schuermann, 2006; Morone et al., 2007; Jouanin et al., 2004). Если первые две статьи представляют результаты комплексного эмпирического расчета совокупного риска банка, но третья – обсуждает вопросы измерения отдельных рисков, не сводя их к оценке совокупного. Несмотря на то что работы ориентированы на разные типы данных (первая – на данные по крупнейшим банкам, вторая и третья – на данные одного банка), интересно их сопоставить с точки зрения подходов к выбору копулы для агрегирования рисков. Авторы этих работ единодушны в том, что достаточным условием является использование гауссовской копулы или копулы Стьюдента, хотя в (Jouanin, Ribouler, Roncalli, 2004) отмечается, что для цели стресс-тестирования целесообразно воспользоваться экстремальной архимедовой копулой Гумбеля, характеризующейся наличием зависимости верхних (правых) хвостов распределения.

5.4. Выбор оптимальной структуры инвестиционного портфеля

Новым направлением развития теории инвестиционного портфеля является приложении копул к моделированию многомерных распределений в задачах оптимизации структуры портфеля. Здесь стоит отметить такие работы, как (Hennessy, Lapan, 2002; Natale, 2006; Алексеев и др., 2006). В частности, в (Hennessy, Lapan, 2002) рассматриваются архимедовы копулы для моделирования многомерного распределения, лежащего в основе задачи оптимизации портфеля при максимизации функции ожидаемой полезности. Авторы считают, что отдельные выводы микроэкономического анализа в части поведения оптимизирующего портфель субъекта можно перенести как условие на функцию-генератор архимедовой копулы.

Если работа (Hennessy, Lapan, 2002) носила теоретический характер, то исследование (Natale, 2006) является эмпирическим и построено на основе одиннадцатимерного распределения месячных доходностей акций. В данной работе аппарат копул (в частности, копула Клэйтона) использован для моделирования связки совместного распределения, с привлечением теории экстремальных значений для восстановления частных распределений. Существенным упущением работы является отсутствие обоснования выбора копулы.

Несмотря на выбор, сделанный Ф. Натале (Natale, 2006) в пользу копулы Клэйтона, в другом исследовании (Алексеев и др., 2006) авторы предпочли копулу Али-Микаэля-Хака, выбирая из нее копулы Клэйтона и других, при оптимизации портфеля акций на основе данных о ежедневных котировках. Они отказались от копулы Клэйтона из-за того, что она, по их мнению, характеризуется зависимостью верхних хвостов. В действительности авторы рассматривали копулу дожития Клэйтона, которая, как и вероятность дожития в страховании, равна единице за вычетом значения обычной копулы Клэйтона с зависимостью нижних хвостов. Данное методологическое несоответствие могло в существенной степени обусловить предпочтение копулы Али-Микаэля-Хака перед копулой (дожития) Клэйтона при выборе наилучшей для описания исходных данных.

Стоит также отметить работу, в которой анализируется эффект разных мер риска на оптимальную структуру инвестиционного портфеля и показано, что эмпирическое многомерное распределение доходностей не соответствует гауссовской копуле (Adam, Houkari, Laurent, 2007, p. 11–12).

5.5. Хеджирование риска

Задача хеджирования риска инвестиционного портфеля – это частный случай задачи портфельной оптимизации. При хеджировании риска целевой минимизируемой функцией служит мера разброса (дисперсия) стоимости инвестиционного портфеля в отличие от функции совокупной доходности, которая максимизируется в общей постановке задачи о выборе оптимального инвестиционного портфеля. Отталкиваясь от предположения о многомерной нормальности распределения цен текущих (хеджируемых) и срочных (хеджирующих) контрактов, можно использовать меру ковариации (см. например, (Cecchetti, Cumby, Figlewski, 1988)) для определения оптимальной доли второго актива для минимизации дисперсии стоимости совокупного инвестиционного портфеля. Тем не менее, как показано в работах (Hsu et al., 2007; Lai et al., 2009), предположение о нормальности распределения цен не соответствует действительности.

Так, в работе (Hsu et al., 2007) модели «копула» сравниваются с моделями *DCC-*, *CCC-GARCH*. Оценка копул проводится полностью параметрическим способом. В основе исследования лежат дневные данные биржевых индексов и фьючерсов на них за период 2.01.1995–31.10.2005. Авторы исследуют применение копул к моделям прямого и перекрестного хеджирования. Первый тип операций предполагает заключение срочных сделок на базовый актив, тогда как второй – на актив, динамика цен которого сонаправлена с динамикой цены базового актива. В итоге авторы делают вывод о том, что копулы оказываются более эффективными при определении оптимального хеджирующего соотношения, причем гауссовская копула является таковой для операций прямого хеджирования, а копула Гумбеля – для перекрестного.

В статье (Lai et al., 2009), основываясь на ежедневных данных о котировках пяти индексов стран Юго-Восточной Азии и фьючерсов на них за период 01.01.1998–10.06.2005, показано преимущество использования копул в хеджировании, поскольку это позволяет повысить среднюю доходность инвестиционного портфеля и снизить его вариацию по сравнению с традиционными методами определения оптимального хеджирующего соотношения. Подобно (Hsu et al., 2007) в части моделирования прямого хеджирования, авторы отмечают, что особенно эффективной оказалась гауссовская копула и копула Стьюдента и что использование копул целесообразно на высоковолатильных рынках (например, Корея, Тайвань), тогда как на стабильных (например, Япония, Сингапур) традиционные стратегии, основанные на методе наименьших квадратов, оказываются достаточными.

Обобщая выводы, заметим, что во всех рассмотренных работах был подтвержден негауссовский характер изучавшихся совместных распределений (даже в случаях выбора гауссовской копулы частные распределения были негауссовскими, что не позволяет утверждать о наличии совместного многомерного гауссовского распределения).

6. Открытые вопросы

В работе был проведен обзор как теоретической, так и эмпирической базы приложений моделей «копулы». Несмотря на то что вопрос их применения кажется достаточно изученным, существует ряд проблем, которые требуют дальнейшей проработки.

В частности, в (Genest, Nešlehová, 2007) показано, что неединственность результатов тестов инференции связана с неединственностью копулы при использовании дискретных данных. Это связано с наличием скачков в значении частных эмпирических функций распределения. Поэтому теорема Шкляра оказывается неприменимой, поскольку в теореме предполагалась непрерывность случайных величин. Итогом становится неединственность оценки копулы, что имеет ряд проявлений, которые необходимо дополнительно учитывать при работе с дискретными данными. Согласуясь с выводами Маршалла (Marshall, 1996), Ч. Женест и Дж. Нешлехова признают, что значение параметра копулы зависит от частных распределений (Genest, Nešlehová, 2007, p. 490). По их мнению, не следует применять методы инференции, основанные на ранговом преобразовании данных, и абсолютная зависимость случайных величин не всегда находит отражение в максимальных по модулю значениях коэффициента ранговой корреляции.

В дополнение к проблеме дискретных данных исследователю необходимо принимать во внимание возможность изменения природы процесса, генерирующего данные, т.е. наличие структурных сдвигов в первичных данных. Вопрос структурных сдвигов достаточно широко проработан в литературе, посвященной анализу временных рядов (подробнее о тестах на проверку его наличия см. обзор (Перрон, 2005)). Поскольку в финансовых задачах, посвященных оценке риска и ценообразованию, исследователь имеет дело с многомерными финансовыми рядами, возникает потребность в исследовании структурного сдвига в совместных распределениях. Среди первых наработок в России можно выделить статью (Бродский и др., 2009), в которой предлагается модель непараметрической оценки структурного сдвига в копуле. В работе приводятся критические значения статистики для копул Клэйтона и Гумбеля, анализируются ошибки первого и второго рода, предложенный тест проверяется на эмпирических финансовых данных с динамикой процентных ставок. Несмотря на наличие существенного результата, остается потребность в объединении тестов на наличие структурных сдвигов в частных распределениях и в копуле.

Подводя итог, можно констатировать, что дискретные данные, формирующие базу для анализа и моделирования копул, с одной стороны, порождают неединственность оценки копулы, а с другой стороны – могут привести к смещенным оценкам при некорректном учете явлений структурных сдвигов как в частных распределениях, так и в копуле. Данные вопросы однозначно требуют ответов для развития теории копул, но выходят за рамки текущего обзора.

Литература

Алексеев В.В., Шоколов В.В., Соложенцев Е.Д. (2006): Логико-вероятностное моделирование портфеля ценных бумаг с использованием копул // *Управление финансовыми рисками.* № 3. С. 272–283.

Бродский Б.Е., Пеникас Г.И., Сафарян И.А. (2009): Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул // *Прикладная эконометрика.* Т. 16. № 4. С. 3–15.

Канторович Г.Г. (2002): Анализ временных рядов // *Экономический журнал ВШЭ.* № 1 (с. 85–116); № 2 (с. 251–272); № 3 (с. 379–401); № 4 (с. 498–523).

Фантаццини Д. (2008): Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // *Прикладная эконометрика.* Т. 10, № 2 (с. 91–137); т. 11, № 3 (с. 87–122); т. 12, № 4 (с. 84–138).

Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. (2009): Pair-Copula Construction of Multiple Dependence // *Insurance: Mathematics and Economics.* № 44. P. 182–198.

Adam A., Houkari M., Laurent J.-P. (2007): Spectral Risk Measures and Portfolio Selection. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://laurent.jeanpaul.free.fr, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Alexander C., Pezier J. (2003): Assessment and Aggregation of Banking Risks. 9th Annual Round Table International Financial Risk Institute (IFCI). [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.gloriamundi.org/library_journal_view.asp?journal_id=6828, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Anderson T., Darling D. (1954): A Test of Goodness-of-Fit // *Journal of The American Statistical Association.* Vol. 268. № 49. P. 765–769.

Ane Th., Kharoubi C. (2003): Dependence Structure and Risk Measure // *Journal of Business.* Vol. 76. № 3. P. 411–438.

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. (2006): Multivariate GARCH models: a survey // *Journal of Applied Econometrics.* Vol. 21. № 1. P. 79–109.

BCBS (2009): Range of practices and issues in economic capital frameworks. Режим доступа: http://www.bis.org/publ/bcbs152.htm, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Berg D. (2009): Copula goodness-of-fit testing: An overview and power comparison [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.danielberg.no/dunder/research.php, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Bouye E. (2002): Multivariate Extremes at Work for Portfolio Risk Measurement. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=1272351, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Cecchetti S., Cumby R., Figlewski S. (1988): Estimation of the Optimal Futures Hedge // *The Rev. of Econ. and Statistics.* Vol. 70. № 4. P. 623–630.

Cech C. (2006): Copula-Based Top-Down Approaches in Financial Risk Aggregation. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=953888, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Cherubini U., Luciano E. (2000): Multivariate Option Pricing with Copulas. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=269868, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. (2004): Copula Methods in Finance. N.Y.: John Wiley & Sons Ltd.

Chollete L., Heinen A. (2006): Frequent Turbulence? A Dynamic Copula Approach [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=968923, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Clemen R., Reilly T. (1999): Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis // *Management Science.* Vol. 45. № 2. P. 208–224.

Dobric J., Schmid F. (2007): A Goodness of Fit Test for Copulas Based on Rosenblatt's Transformation // *Computational Statistics & Data Analysis.* № 51. P. 4633–4642.

Embrechts P., McNeil A., Straumann D. (1999): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.math.ethz.ch/~strauman/preprints/pitfalls.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Fantazzini D. (2009a): The Effects of Misspecified Marginals and Copulas on Computing the Value at Risk: A Monte Carlo study // *Computational Statistics and Data Analysis.* № 53 (6), P. 2168-2188.

Fantazzini D. (2009b): Dynamic Copula Modelling for Value at Risk // *Frontiers in Finance and Economics.* [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=944172, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Frees E., Valdez E. (1998): Understanding Relationships Using Copulas // *North American Actuarial Journal.* Vol. 2. № 1. P. 1–25.

Genest C., Nešlehová J. (2007): A Primer on Copulas for Count Data // *Astin Bulletin.* Vol. 37. № 2. Режим доступа: http://www.actuaries.org/LIBRARY/ASTIN/vol37no2/475.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Genest C., Remillard B., Beaudoin D. (2009): Goodness-of-Fit Test for Copulas: A Review and a Power Study // *Insurance: Mathematics and Economics.* № 44 (2). P. 199–213.

Genest Ch., Remillard B. (2004): Tests of Independence and Randomness Based on the Empirical Copula Process // *Test.* Vol. 13. № 2. P. 335–369.

Genius M., Strazzera E. (2004): The Copula Approach to Sample Selection Modelling: An Application to the Recreational Value of Forests. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=546522, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Ghoudi K., Khoudraji A., Rivest L.-P. (1998): Proprietes statistiques des copules des valeurs extremes bidiminsionnelles // *The Canadian Journal of Statistics.* Vol. 26. № 1. P. 187–197.

Goorbergh R. van den, Genest C., Werker B. (2005): Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models // *Insurance: Mathematics and Economics.* № 37. P. 101–114.

Hennessy D., Lapan H. (2002): The Use of Archimedean Copulas to Model Portfolio Allocations // *Mathematical Finance.* № 12. P. 143–154.

Hofert M. (2008): Sampling Archimedean Copulas // *Computational Statistics and Data Analysis.* № 52. P. 5163–5174.

Houle M. (2008): The Relevant-Set Correlation Model for Data Clustering. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.siam.org/proceedings/datamining/2008/dm08_70-houle-rev.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Hsu Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H. (2007): Dynamic Hedging with Futures: A Copula-based GARCH Model. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=1083890, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Huffer F., Park C. (2007): A Test for Elliptical Symmetry // *Journal of Multivariate Analysis.* № 98. P. 256–281.

Jouanin J.-F., Ribouler G., Roncalli Th. (2004): Financial Applications of Copula Functions. [Электронный ресурс] In: «*Risk Measures for the 21st Century*». Szego G. (ed). Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=1032588, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Kim G., Silvapulle M., Silvapulle P. (2007): Comparison of Semiparametric and Parametric Methods for Estimating Copulas // *Computational Statistics & Data Analysis.* № 51. P. 2836–2850.

Kiwitt S., Neumeyer N. (2008): Nonparametric Copula Density Estimation: Testing for Independence and Other Applications. University of Hamburg. [Электронный ресурс] Режим доступа: httm://www.math.uni-hamburg.de/research/papers/prst/prst2008-02.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Kole E., Koedijk K., Verbeek M. (2006): Selecting Copulas for Risk Management [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=920870, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Laforge Ch. (2008a): Construction of Multivariate Copulas and the Compatibility Problem. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=956041, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Laforge Ch. (2008b): M-Pivot Copulas: Multivariate Copulas Defined on Their 2-Margins [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=977991, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Lai Y. et al. (2009): Optimal Dynamic Hedging Via Copula-Threshold-GARCH Models // *Math. Computation and Simulation.* № 79 (8). P. 2609–2624.

Laurent J.-P., Gregory J. (2003): Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://laurent.jeanpaul.free.fr, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Liebscher E. (2005): Semiparametric Density Estimators Using Copulas // *Communications in Statistics – Theory and Methods.* № 34. P. 59–71.

Liebscher E. (2008): Construction of Asymmetric Multivariate Copulas // *Journal of Multivariate Analysis.* № 99. P. 2234–2250.

Lintner J. (1965): The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // *The Rev. of Econ. and Statistics.* № 47. P. 13–37.

Longin F., Solnik B. (1998): Correlation Structure of International Equity Markets During Extremely Volatile Periods. [Электронный ресурс] Group HEC. Mimeo. Режим доступа: http://www.hec.fr/var/fre/storage/original/application/ed3704c78bea68631f4dc769d554a1ed.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Markowitz H. (1990): Foundations of Portfolio Theory. Nobel Lecture. December 7. Режим доступа: http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/markowitz-lecture.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Marshall A. (1996): Copulas, Marginals, and Joint Distributions // *Lecture Notes-Monograph Series. Distributions with Fixed Marginals ad Related Topics.* № 28. P. 213–222.

Masala G., Menzietti M., Micocci M. (2005): Pricing Credit Derivatives with a Copula-Based Actuarial Model for Credit Risk. [Электронный ресурс] // *Economia. Società ed istituzioni.* Vol. 5. № 1. P. 79–102. Режим доступа: http: //ssrn.com/abstract=968682, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Merton R. (1973): An Intertemporal Capital Asset Pricing Model // *Econometrica.* № 41. P. 867–887.

Michele C. de, Salvadori G., Passoni G. et al. (2007): A Multivariate Model of Sea Storms Using Copulas // *Coastal Engineering.* № 54. P. 734–751.

Morone M., Cornaglia A., Mignola G. (2007): Economic Capital Assessment Via

Copulas: Aggregation and Allocation of Different Risk Types. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.riskwhoswho.com/Resources/MignolaGiulio1.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Myers R., Hanson S. (1996): Optimal Dynamic Hedging in Unbiased Futures Markets // *American Journal of Agricultural Econ.* Vol.78. № 1. P. 13–20.

Natale F. P. (2006): Optimization with Tail-Dependence and Tail Risk: A Copula Based Approach for Strategic Asset Allocation. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ssrn.com/abstract=942275, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.). Nov.

Nelsen R. (2006): An Introduction to Copulas. N.Y.: Springer.

Ng W. (2008): Modeling Duration Clusters with Dynamic Copulas // *Finance Research Letters.* № 5. P. 96–103.

Okhrin O., Okhrin Y., Schmid W. (2009): Properties of Hierarchical Archimedean Copulas. SFB 649 Discussion Paper 2009–014. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/papers/pdf/SFB649DP2009-014.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Patel K., Pereira R. (2008): The Determinants of Default Correlations // *Advances in Econometrics: Econometrics and Risk-Management.* № 22. P. 123–158.

Perron P. (2005): Dealing with Structural Breaks // *Palgrave Handbook of Econometrics.* Vol. 1. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://sws1.bu.edu/perron/papers/dealing.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Remillard B., Scaillet O. (2009): Testing for Equality Between Two Copulas // *Journal of Multivariate Analysis.* № 100. P. 377–386.

RiskMetrics (1996): Technical Document. N.Y.: J.P. Morgan/Reuters.

Rosenberg J., Schuermann T. A. (2006): General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks // *Journal of Financial Econ.* № 79. P. 569–614.

Rosenblatt M. (1952): Remarks on a Multivariate Transformation // *The Annals of Math. Statistics.* Vol. 23. № 3. P. 470–472.

Samuelson P. (1969): Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming // *Rev. of Econ. and Statistics.* № 51. P. 239–246.

Sarathy R., Muralidher K., Parsa R. (2002): Pertubating Nonnormal Confidental Attributes: The Copula Approach // *Management Science.* Vol.48. № 12. P. 1613–1627.

Savu C., Ng W. (2005): The SCoD Model: Analyzing Durations with a Semiparametric Copula Approach // *International Rev. of Finance.* Vol. 5. № 1–2. P. 55–74.

Savu C., Trede M. (2006): Hierarchical Archimedean Copulas. Munster [Электронный ресурс] Режим доступа: httm://www.uni-konstanz.de/micfinma/conference/Files/papers/Savu_Trede.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Savu C., Trede M. (2008): Goodness-of-Fit Test for Parametric Families of Archimedean Copulas // *Quantitative Finance.* Vol. 8. № 2. P. 109–116.

Sklar A. (1959): Fonctions de repartition a *n* dimensions et leurs marges // *Publications de l'institut de statistique de l'universite de Paris.* № 8. P. 229–231.

Smith M. (2003): Modelling Sample Selection Using Archimedean Copulas // *Econometrics Journal.* № 6. P. 99–123.

Sun J., Frees E., Rosenberg M. (2008): Heavy-Tailed Longitudinal Data Modeling Using Copulas // *Insurance: Mathematics and Econ.* № 42. P. 817–830.

Tang A., Valdez E. (2006): Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. Sydney. [Электронный ресурс] Режим доступа: httm://www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.).

Walter G., Sanddorf-Koehle, Friedmann R. (2004): A Conditional Distribution Model for Limited Stock Index Returns. [Электронный ресурс] // *Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings 437, Econometric Society.* Режим доступа: http://ideas.repec.org/p/ecm/feam04/437.html, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: июнь 2010 г.)

Whelan N. (2004): Sampling from Archimedean Copulas // *Quantitative Finance.* Vol. 4. № 3. P. 339–352.

Поступила в редакцию 20.10.2009 г.

H.I. Penikas
Higher School of Economics, Moscow

Financial Applications of Copula-Models

The paper aims at introducing copula-models' concepts and its application to solving such financials programs as risk measurement, risk hedging, portfolio optimization, derivatives pricing and duration models evaluation. For the purpose the copula definition is firstly introduced. Then different copula families, model estimation and inference techniques are discussed. A detailed review of relevant literature is provided. Finally the unresolved issues are presented that might well become the subjects of further research.

Keywords: **copula, archimidienne, extreme, risk, hedging, duration.**

JEL classification: C16, C46.